

① a) Piani per π : $\lambda x + \lambda y + (\mu - \lambda)z - (\lambda + \mu) = 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$1 = d(\pi, 0) = \frac{|-(\lambda + \mu)|}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + (\mu - \lambda)^2}} \Leftrightarrow \cancel{\lambda^2} + \cancel{\mu^2} + 2\lambda\mu = 2\lambda^2 + \cancel{\mu^2} + \cancel{\lambda^2} - 2\lambda\mu$$

2 soluzioni: $\begin{cases} \lambda = 0: \boxed{z = 1} \\ \lambda = 2\mu: \boxed{2x + 2y - z - 3 = 0} \end{cases} \Leftrightarrow 4\lambda\mu - 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda(2\mu - \lambda) = 0$

b) Equazioni parametriche per π : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$; $\vec{v}_\pi = (-1, 1, 0)$

Il piano coordinato yz ha vettore giacitura $\vec{u} = (1, 0, 0)$.

Ora $\frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}_\pi\| \|\vec{u}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, quindi $\widehat{\vec{v}_\pi, \vec{u}} = \arccos(-1/\sqrt{2}) = 3\pi/2$.

Dunque l'angolo tra π ed il piano coordinato yz è pari a $\pi/2$.

c) Calcoliamo $R = \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z + 1 = 2 \\ z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, $\boxed{R = (0, 2, 1)}$

Per determinare Q , scriviamo equazioni parametriche per la retta s di punto origine P e direzione perpendicolare a π (vett. parallelo a $\vec{v}_\pi = (-1, 1, 0)$):

$s: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$; il punto $s \cap \pi$ ha ascisse $t \in \mathbb{R}$ tale che $t + t - 2 = 0$ dunque $t = 1$.

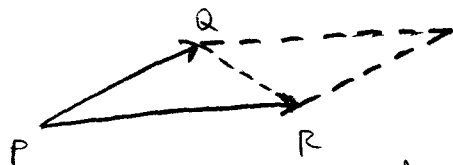
Il punto Q si ottiene dunque sulla retta s con ascisse $t = 2$, dunque $\boxed{Q = (2, 2, 1)}$.

Ottieniamo

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{PR} = (0, 2, 0)$$

ed allora



Area di $\triangle PQR$ $= \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right|$

$$= \frac{1}{2} |(0, 0, 4)| = \frac{1}{2} \cdot 4 = \underline{\underline{2}}.$$

②

$$z = f(x, y) = (x^2 - y) e^{y-x}$$

$$a) \frac{\partial f}{\partial x} = e^{y-x} (2x - (x^2 - y)) = e^{y-x} (-x^2 + 2x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{y-x} (-1 + (x^2 - y)) = e^{y-x} (x^2 - y - 1)$$

Il piano tangente $\bar{e}$ // al piano coordinato xy se e solo se

$\nabla f = 0$, cioè se e solo se

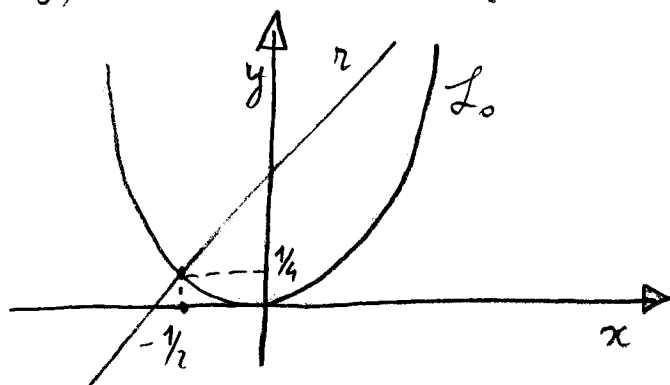
$$\begin{cases} -x^2 + 2x + y = 0 \\ x^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + y + x^2 - y - 1 = 0 \\ x^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/4 - 1 = -3/4 \end{cases} \quad \text{Pertanto } \nabla f(P) = 0 \Leftrightarrow P = (1/2, -3/4).$$

Perciò $f(1/2, -3/4) = e^{-5/4}$, otteniamo un unico punto nel $G(f)$:

$$G = (1/2, -3/4, e^{-5/4})$$

$$b) \underline{L_0}: (x^2 - y) e^{y-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - y = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = x^2}$$



$\bar{e}$ la parabola in figura

Il gradiente di f nei punti di L_0 è dato da $\nabla f|_{L_0} = e^{x^2-x} (2x, -1)$

$$\text{Però } \nabla f|_{L_0} \perp (-1, 1) \Leftrightarrow 0 = e^{x^2-x} (2x-1) \cdot (-1, 1) = -e^{x^2-x} (2x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x = -1/2.$$

Si ottiene quindi in L_0 l'unico punto $\boxed{P_0 = (-1/2, 1/4)}$.

c) Poiché la retta tangente ad L_0 in P_0 ha coeff. angolare pari a $2x|_{x=-1/2} = -1$, la retta r normale ha coeff. angolare pari a 1. Dunque

r ha equazione $y - 1/4 = x + 1/2$ cioè $y = x + 3/4$.

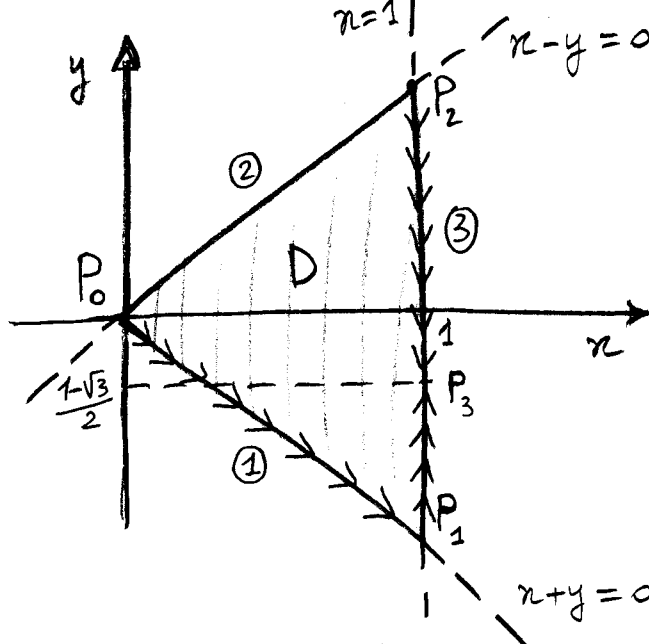
Però $\nabla f|_r = e^{3/4} (-x^2 + 3x + 3/4, x^2 - x - 7/4)$, ed allora deve essere

$$0 = \frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot (1, 1) / \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-x^2 + 3x + 3/4 + x^2 - x - 7/4) \text{ cioè } 2x = 1.$$

$$\text{Allora } \boxed{P_2 = (1/2, 5/4)}$$

③ $z = f(n, y) = (n-y) e^{n^2-y^2}$

$D = \{(n, y) \in \mathbb{R}^2 \mid n \leq 1, n-y \geq 0, n+y \geq 0\}$



$\frac{\partial f}{\partial n} = e^{n^2-y^2} (1+2n(n-y)) = e^{n^2-y^2} (2n^2-2ny+1)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{n^2-y^2} (-1-2y(n-y)) = e^{n^2-y^2} (2y^2-2ny-1)$

la funzione $\bar{e} \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2n^2-2ny+1=0 \\ 2y^2-2ny-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n^2+2y^2-4ny=0 \\ 2y^2-2ny-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2+y^2-2ny=0 \\ 2n^2-2ny-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (n-y)^2=0 \\ 2n^2-2ny-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=y \\ 2n^2-2n^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=y \\ -1=0 \end{cases}$

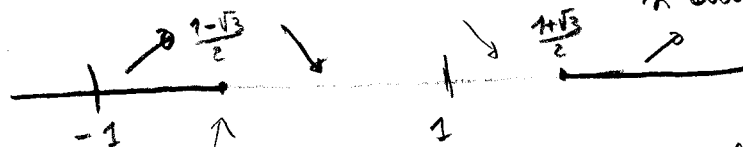
NESSUNA SOLUZIONE, dunque nessun punto critico interno a D.

Ora $\partial D = ① \cup ② \cup ③$.

• $f|_{①} = 2n, n \in [0, 1]$; $P_0 = (0, 0) \rightarrow f(P_0) = 0$
 $P_1 = (1, 2) \rightarrow f(P_1) = 2$

• $f|_{②} = 0, n \in [0, 1]$; dunque $f(P_0) \div f(P_2) = 0$ con $P_2 = (1, 1)$

• $f|_{③} = (1-y) e^{1-y^2}, y \in [-1, 1]$; $f|_{③}' = e^{1-y^2} (-1-2y(1-y)) = e^{1-y^2} (2y^2-2y-1)$
 si annulla in $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$



$P_3 = (1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}) \rightarrow f(P_3) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} e^{1-\frac{1-2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

L'andamento di f su ∂D è riassunto nel disegno a "spina di pesce".

In definitiva ② è costituita da punti di minimo, con $\min = 0$
 $P_3 = (1, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$ è punto di Massimo, con $\text{Max} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$